LE FORME INDETERMINATE

Il calcolo dei limiti e’ complesso solo nel caso delle forme indeterminate, forme in cui si rende necessario ricorrere ad artifici per giungere a un risultato.

Tutti i vari metodi e procedimenti sono finalizzati a trasformare il limite in uno equivalente che non risulti indeterminato.

I metodi che prendiamo in esame in questa trattazione sono solo quelli elementari mentre successivamente si vedranno altri procedimenti che richiedono un livello di conoscenza dell'analisi matematica piu' elevato.

LA FORMA INDETERMINATA $\infty - \infty$

IL LIMITE DI UN POLINOMIO PER X→ ∞

Il limite di un polinomio per x che tende all'infinito da spesso luogo alla forma indeterminata ∞ **-∞ :**

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 + 4x^2 + x) = -\infty + \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 1) = \infty - \infty$$

Per eliminare l'indeterminazione si deve :

- **raccogliere la x di grado massimo**
- **ricordare che nel calcolo dei limiti numero/infinito tende a 0**
- **calcolare il limite che, a questo punto, non si presenta piu' nella forma indeterminata**

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1) = \infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} x^2 (1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \to +\infty} x^2 (1 - 0 + 0) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 + 4x^2 + x) = -\infty + \infty = \lim_{x \to -\infty} x^3 (2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \to -\infty} x^3 (2 + 0 + 0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+1)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}+1)=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}(1-0+0)=+\infty$$

Dai precedenti esempi si puo' dedurre la seguente regola pratica:

IL LIMITE PER X CHE TENDE AD INFINITO DI UN POLINOMIO E' EQUIVALENTE AL LIMITE PER X CHE TENDE AD INFINITO DEL SUO TERMINE DI **GRADO MASSIMO**

$$\lim_{x\to-\infty}(4x-5x^5+1)=\lim_{x\to-\infty}(-5x^5)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[4]{x^3}+1)=\lim_{x\to+\infty}(-2\sqrt[4]{x^3})=-\infty$$

La regola di considerare il termine con esponente piu' elevato vale anche se il polinomio non e' algebrico:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(4tg^3x+2tg^2x)=-\infty+\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}4tg^3x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3-e^{5x}+2e^{2x})=-\infty+\infty=\lim_{x\to+\infty}(-e^{5x})=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}(-4\ln^3x+5\ln^2x+2)=-\infty+\infty=\lim_{x\to0^-}(-4\ln^3x)=+\infty$$

LE FORMA INDETERMINATA ∞ /∞

IL LIMITE DEL RAPPORTO DI DUE POLINOMI QUANDO X→ ∞

Calcolando il limite per X→ ∞ **,** di una frazione algebrica avente sia la numeratore che al denominatore un polinomio si verifica sempre la forma indeterminata ∞ **/**∞ **.**

L'indeterminazione si elimina :

- **considerando sia al numeratore che al denominatore le x di grado massimo**
- **semplificando la frazione ottenuta**
- **calcolando il limite che non si presentera' piu' in una forma indeterminata**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+8x^3+6}{x-x^4-4x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{-4x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{-4}=-\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^7+6}{x+3x^3+4x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^7}{4x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{4x}=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^3-x^2+6}{9+7x^2+4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^3}{4x}=\lim_{x\to\pm\infty}6x^2=\pm\infty$$

La regola di considerare , al numeratore e al denominatore, gli addendi con esponente piu' elevato vale anche quando la frazione non e' algebrica:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x-4\ln x}{4\ln^3 x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{4\ln^3 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln^4 x+4\ln x}{2\ln^3 x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^4 x}{2\ln^3 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{2}=[\frac{-\infty}{2}]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}-6e^x}{2e^{7x}-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{2e^{7x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=[\frac{1}{\infty}]=0$$

ATTENZIONE: tale regola deve essere applicata solo nella forma indeterminata ∞ /∞ , quindi non va applicata nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-6e^x}{2e^{7x}-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-6}{2-7}=\frac{5}{5}=1$$

$$\lim_{x\to e}\frac{3\ln^4 x+4\ln x}{2\ln^3 x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+4}{2+7}=\frac{7}{9}$$

LA FORMA INDETERMINATA **0/0**

PRIMO CASO: LA FUNZIONE E' ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

In questo caso il numeratore e il denominatore sono dei polinomi.

L'indeterminazione si elimina:

- **scomponendo numeratore e denominatore**
- **semplificando la frazione algebrica**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+10x^2}{x^7+6x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+10)}{x^3(x^4+6)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+10}{x(x^4+6)}=\frac{10}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

SECONDO CASO: IL LIMITE NOTEVOLE $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}=1$

Poiche', come si potrebbe verificare,

$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen }x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$

e' possibile risolvere la forma indeterminata 0/0 in esercizi come quelli seguenti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\,\text{sen }x}{x}=\lim_{x\to 0}3\frac{\text{sen }x}{x}=3\cdot 1=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\,\text{sen }3x}{3x}=\lim_{x\to 0}3\frac{\text{sen }3x}{3x}=3\cdot 1=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x\,\text{sen }x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}\text{sen }x=\lim_{x\to 0}\text{sen }x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen }x+x}{x^2-3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\text{sen }x}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2+1}{0-3}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4tgx+6x}{7x^2-3\,\text{sen }x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{4\frac{tgx}{x}+6\frac{x}{x}}{\frac{7x^2}{x}-\frac{3\,\text{sen }x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{4+6}{0-3}=-\frac{10}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3}{\text{sen}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{5xxx}{\text{sen }x\,\text{sen }x\,\text{sen }x}=\lim_{x\to 0}5\frac{\text{sen }x}{x}\frac{\text{sen }x}{x}\frac{\text{sen }x}{x}=5\cdot 1\cdot 1\cdot 1=5$$

IL LIMITE NOTEVOLE : $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

Calcolando il limite di una funzione del tipo $y=g(x)^{f(x)}$, si puo' incontrare la forma indeterminata 1^∞ ; questo succede anche nel seguente caso:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=1^\infty$$

tale limite tende ad **e**, numero trascendente , detto numero di Nepero, che vale circa 2,7.

Si puo' verificare facilmente che

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{bx}=e^{b}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$$

Esempi:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=e^{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{x}=e^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^{2}}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$